איזומורפיזם

# הגדרה

יהיו העתקה לינארית בין מרחבים וקטורים. I נקראת איזומורפיזם אם I היא חח"ע ועל.

# משפט

אם איזומורפיזם אזי קיימת ולינארית.

## הוכחה

נגדיר ע"י אם . (בגלל שI היא על ו1-1 לכל קיים יחיד כך ש)

I לינארית: אזי קיימים כך ש.  
*I לינארית, לכן*

*... I לינארית =>*

# משפט

אם V וU איזומורפיים(כלומר קיים איזומורפיזם) אזי .(נוכיח רק אם

## הוכחה

, איזומורפיזים ו בסיס אזי גם בסיס:

1. לכל קיים כך ש =>
2. בת"ל... תרגיל

## הערה

אם אזי U וV איזומופריים – קיים איזומורפיזם

### הוכחה

נניח . נבחר בסיסים ונגדיר העתקה לינארית ע"י .

1. היא על:  
    =>
2. נשתמש במשפט:

# משפט

היא 1-1 אם ורק אם (כלומר )

## הוכחה

1. אם 1-1 => כי
2. צ"ל => 1-1: => כך ש. אם כך ש =>  
    => => =>

### נמשיך את ההוכחה הקודמת

נוכיח ש (=> 1-1):

נבדוק ש ו אזי :   
 כי בת"ל =>

# תוצאה

V,U איזומורפיזם אם ורק אם (הוכחנו ל)

## הערה

האיזומורפיזם לא יחיד

## תרגיל

מה הם U,V ושדה כך שהאיזומורפיזם בין U וV הוא יחיד?

### רמז

אם איזומורפיזם ו אזי גם איזומורפיזם.

# משפט

יהיו V,U מ"ו מעל אותו שדה ו מרחב העתקות לינאריות מV לU. נבחר בסיסים ונקבל העתקה . אזי איזומורפיזם.

## תוצאה

## הוכחה

לינארית: : , – תרגיל!

*איזומורפיזם:*

1. *על: אם אזי נגדיר ווקטורים ,, ץ מתקיים*
2. *1-1: ⬄ : העתקה מ היא העתקת 0 אם ורק אם תמונות של בסיס בV הוא אפס.  
    ⬄ ⬄ ⬄ .*

הרכב של העתקות

# הגדרה

יהיו ו העתקות לינאריות.  
אזי נגדיר ע"י לכל .

# משפט

העתקה לינארית.

## הוכחה



# משפט

יהיו העתקות ו בסיסים. אזי מתקיים:

## הוכחה

*=>  
כי קיימת מטריצה יחידה כך ש*

# הערה

אם A,B,C מטרציות אזי מתקיים:

גם מתקיים: להעתקות G,F,H:  
לפי התכונות של ההעתקה הלינארית:

אופרטורים

# הגדרה

העתקה לינארית נקרא אופרטור(במרחב V או על V)

# סימון

*(אנדומורפיזם)*

# הערה

אם ו בסיס אזי ל מטריצה היא ריבועית.

# משפט

יהי V מ"ו מעל . לאופרטורים . מתקיים:

1. לכל ,
2. ,
3. אם אופרטור זהות אזי תרגיל: 4'. אם אופרטור ה0 אזי
4. :

## הערה

כל מבנה שמקיים 1-5 נקרא "אלגברה מעל ".

לדוגמה: אלגברה.